平成 16 年度後期，線形代数
問題演習（11 月 29 日版）

問 1.　次の計算をせよ．

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

問 2.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$とする．AB と BA をそれぞれ計算せよ．これらの結果は等しくなったか？

問 3.

次の行列の逆行列を求めよ．その結果ともとの行列の積（右からの積と，左からの積がある）が単位行列になることを確認せよ．ただし，逆行列が存在しないかもしれない．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} =$$

逆行列の公式：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

問 4.

$${}^{T}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

問 5.　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$とする．以下の行列$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$を求めよ．

$\mathbf{B} = {}^{T}\mathbf{A} + \mathbf{A}$

$\mathbf{C} = \mathbf{A} - {}^{T}\mathbf{A}$

行列 $\mathbf{B}$ , $\mathbf{C}$ のような行列はそれぞれ何行列と呼ばれるか. ただし, 答は正方行列以外とする.

問 6.　行列のべき乗を以下のように定義する.

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{n\text{個}}$$

ここで,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

としたときに， $\mathbf{A}^2$ ， $\mathbf{A}^3$ を計算せよ． $\mathbf{A}^n$ はどのようになるか推測せよ.

問 7.　$\mathbf{A} = [a_{ij}]$（ただし，A は m×n 型）， $\mathbf{B} = [b_{ij}]$（ただし，B は n×l 型）， $\mathbf{C} = [c_{ij}]$　（ただし，C は m×l 型）とするとき,

C=AB

を成分で表示せよ.

$\mathbf{C}^T = [\bar{c}_{ij}]$ としたとき， $\bar{c}_{ij}$ を $a_{ij}$ と $b_{ij}$ を用いて表せ.

$A^T = [\bar{a}_{ij}]$， $B^T = [\bar{b}_{ij}]$ としたとき， $\bar{c}_{ij}$ を $\bar{a}_{ij}$ と $\bar{b}_{ij}$ を用いて表せ.

結局， $\mathbf{C}^T = (AB)^T = B^T A^T$ が証明された.

問 8.　ベクトル $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ が以下のように定義されている.

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ および $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ を図解せよ.

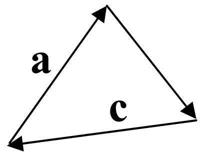

問 9.　問 8 のベクトル $\mathbf{a}$ に対して， $1.5\mathbf{a}$ ， $-2\mathbf{a}$ を図解せよ.

問 10.　以下のようなベクトル $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ ， $\mathbf{c}$ がある．このとき,

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

で定義されるベクトル $\mathbf{d}$ はどのようなベクトルになるか？

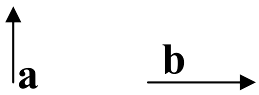
**b**




問 11.　以下のベクトル $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ がある．次のようなベクトル $\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$ を図解せよ．

$\mathbf{p} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b}$

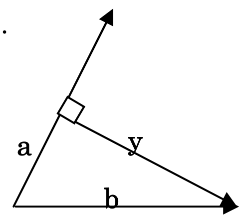
$\mathbf{q} = \mathbf{a} - 3\mathbf{b}$




問 12.

ベクトル $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ の大きさがそれぞれ，1，2 であり，ふたつのベクトルのなす角が 45 度であるとき，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ の内積を求めよ．

問 13.




図のように $\mathbf{a}$ に直交するベクトル $\mathbf{y}$ を求めよ．

問 14.

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を $\theta$ としたとき，$\cos\theta$ を求めよ．

問 15.

$x_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ で表される点 A，B がある．

$\overrightarrow{AB}$　を求めよ．

(1)　直線 AB の方程式を媒介変数 t を用いて表せ．ただし，直線上の任意の点を $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ で表し，この直線が点 A を通るという条件を用いて，方程式を導け．結果はベクトルの成分を用いて表せ．

(2)　媒介変数 t を消去せよ．

(3)　直線 AB は点 B を通るという条件を用いても同様な式が導けることを示せ．

問 16.

$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ であるとき，外積 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ を求めよ． $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ が a，b と直交していることを確認せよ．

問 17.

適当な三次元の直交座標系を考える．その原点を O とする．あるベクトルはこの座標系の x,y,z 軸に沿って定義された基本ベクトル（それぞれ大きさ 1）を用いて成分表示できるものとする．位置ベクトル，

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

によりそれぞれ表される 3 点 $P_1$，$P_2$，$P_3$ を考え，この 3 点を通る平面を以下のように求めてみる．

(1) $\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{P_1P_3}$ を成分表示せよ．（ヒント：例えば，$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}$ であることに注意する．）

(2) $\mathbf{a}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_2}$ としたとき，$\mathbf{a}$ を成分表示せよ．

(3) $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ としたとき，$\mathbf{n}$ を成分表示せよ．

(4) $\mathbf{n}$ はどのようなベクトルか？日本語で説明せよ．

(5) 平面の式は，平面上のある点の位置ベクトルを

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

とすると，

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\cdot\mathbf{n}=0$$

で表される．これを成分を用いて計算せよ．

(6) 平面の式は,

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)\cdot\mathbf{n}=0$$

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_3)\cdot\mathbf{n}=0$$

でも表される．それぞれ，成分を用いて計算して，(5)の結果と一致することを示せ．

問 18.

以下では二次元平面上のベクトルを考える．適当な二次元の直交座標系を考えるものとする．この座標系の x，y 軸に沿った二つの基本ベクトルを考え，任意のベクトルはそれらによる成分で表すものとする．

ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を原点を中心として反時計周りに $\theta$ 回転させると，ベクトル $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ になるものとする．ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ からベクトル $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ への変換は以下のような線形変換として表すことができる．

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(1)ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を原点を中心として $\pi/2$ (90° ) 回転させるとどのようなベクトルになるか．上に示した回転の線形変換の公式を用いて計算せよ．

(2)ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を原点を中心として $-\pi/2$（90° ）回転させるとどのようなベクトルになるか．

問 19.

あるベクトルの長さを 2 倍にするような線形変換は以下のようになる．

$$f:\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

あるベクトルを $\pi/4$（45° ）回転するような線形変換は以下のようになる．

$$g:\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{24} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

(1) 合成変換 $g\circ f$ を表す行列 $\mathbf{C}$ を求めよ．

(2) 合成変換 $g\circ f$ の意味を説明せよ．

(3) 以下のようなアフィン変換 $h$ を考える．

$$h:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\mathbf{C}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

二次元平面上の 3 個の位置ベクトル（成分表示）

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

により表される 3 点を結んでできる三角形を考える．ベクトル $\mathbf{x}_1$， $\mathbf{x}_2$， $\mathbf{x}_3$ をアフィン変換 $h$ により変換せよ. この変換により求められた 3 個の位置ベクトルにより表される 3 点を結んでできる三角形はどんな三角形になるか.

問 20.

行列 $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ により $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ を $a'=\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\end{bmatrix}$ に変換せよ.

$|a'|$ を求めよ.

$|a|=|a'|$ となり, 行列 A で表される線形変換はベクトルの長さを変えない変換(直交変換)であることがわかる．実は，行列 A は 45 度の回転を表している．回転を表す線形変換は直交変換であることがわかる．直交変換を表す行列を直交行列と呼ぶ.

問 21. 行基本操作により次の行列を階段行列に変換せよ．ランクはそれぞれいくつか？

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&2\\0&1&0\end{bmatrix}$$

問 22.

次の連立一次方程式を解け

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=1\\ x_1-x_2=3\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

問 23.

$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$が$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$の固有ベクトルとなることを確認せよ.

$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$はどうか？

問 24.

列ベクトルを用いて（直交座標系の成分として）成分表示されたベクトル$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$とベクトル$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$は一次独立かどうかをランクを利用して判定せよ.

問 25. 次の連立一次方程式を解け（解の構造を求めよ）

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x + 9y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

問 16. $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$の固有値と固有ベクトルを求めよ.